Dynamische Losgrößenmodelle mit Kapazitätsbeschränkungen

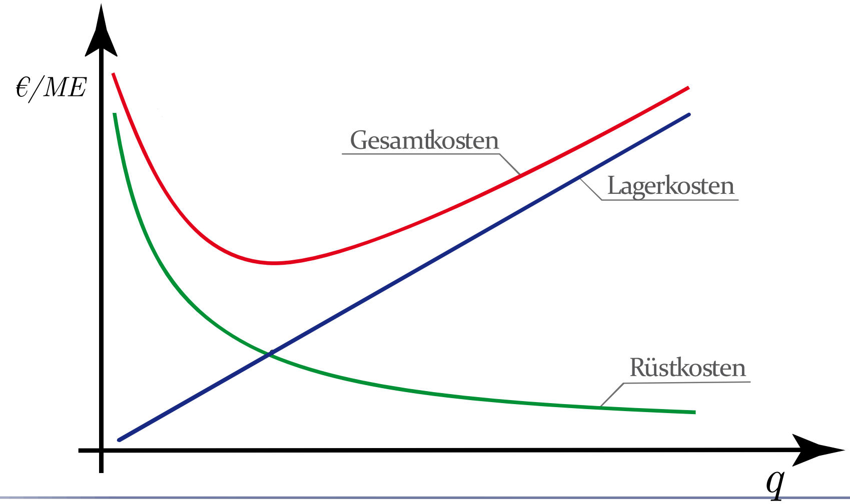
Florian Klatt

Andreas Rudi

Losgrößenplanung

- eine optimierende Losgrößenplanung ist für *Trivialprobleme*, nicht aber für praxisrelevante Problemgrößen möglich

- Daumenregeln zur Losgrößenplanung genügen, Abweichungen von der *optimalen Losgröße* erhöhen die Kosten nur *unwesentlich*



Übersicht

- Problematik der Losgrößenplanung
- Modellübersicht
- Das CLSP-Modell
  - Reformulierungen
  - Lösungsverfahren
- Das MLCLSP-Modell
  - Reformulierungen
  - Lösungsansätze
- Numerische Untersuchung

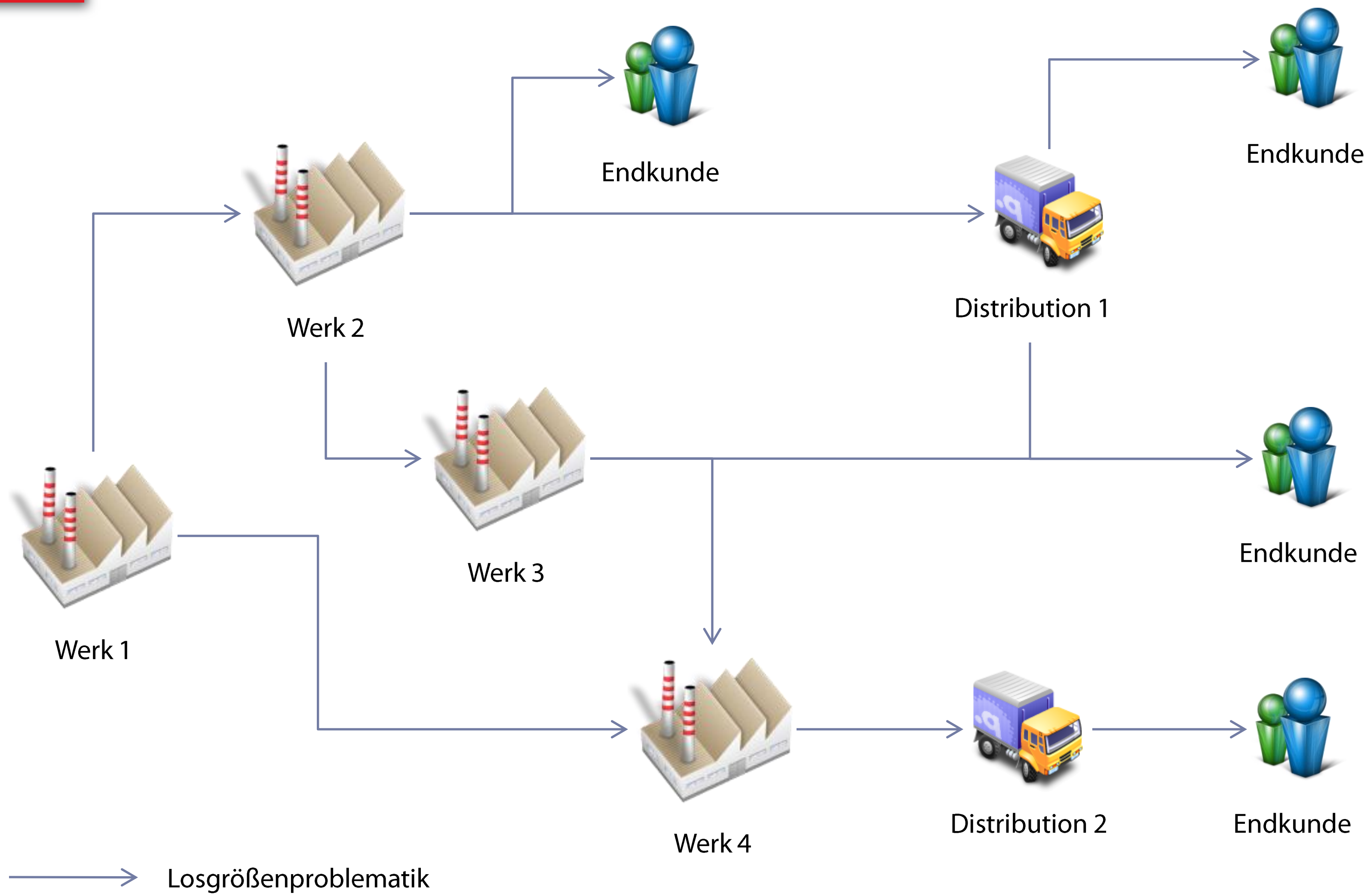
Problematik der Losbildung

- **Los**: Zusammenfassung zeitlich aufeinanderfolgender Bedarfsmengen zu einer Produktionsmenge, die *auf einer Ressource* ohne Unterbrechung ausgeführt wird und bei Produktionsbeginn einen *Rüstaufwand* erfordert.

- **Trade-Off**: gegenläufige Entwicklung der Lager- und Rüstkosten in Abhängigkeit von der Losgröße
  - mit steigender Losgröße sinkt die Auflagehäugikeit.
  - die durchschnittliche Lagermenge jedoch steigt

- **Ziel:** Kostenminimale Losgröße bei
  - voller Bedarfsdeckung sowie
  - Einhaltung von Kapazitätsrestriktionen

Losgrößenplanung in der SC



Problematik der Losgrößenplanung

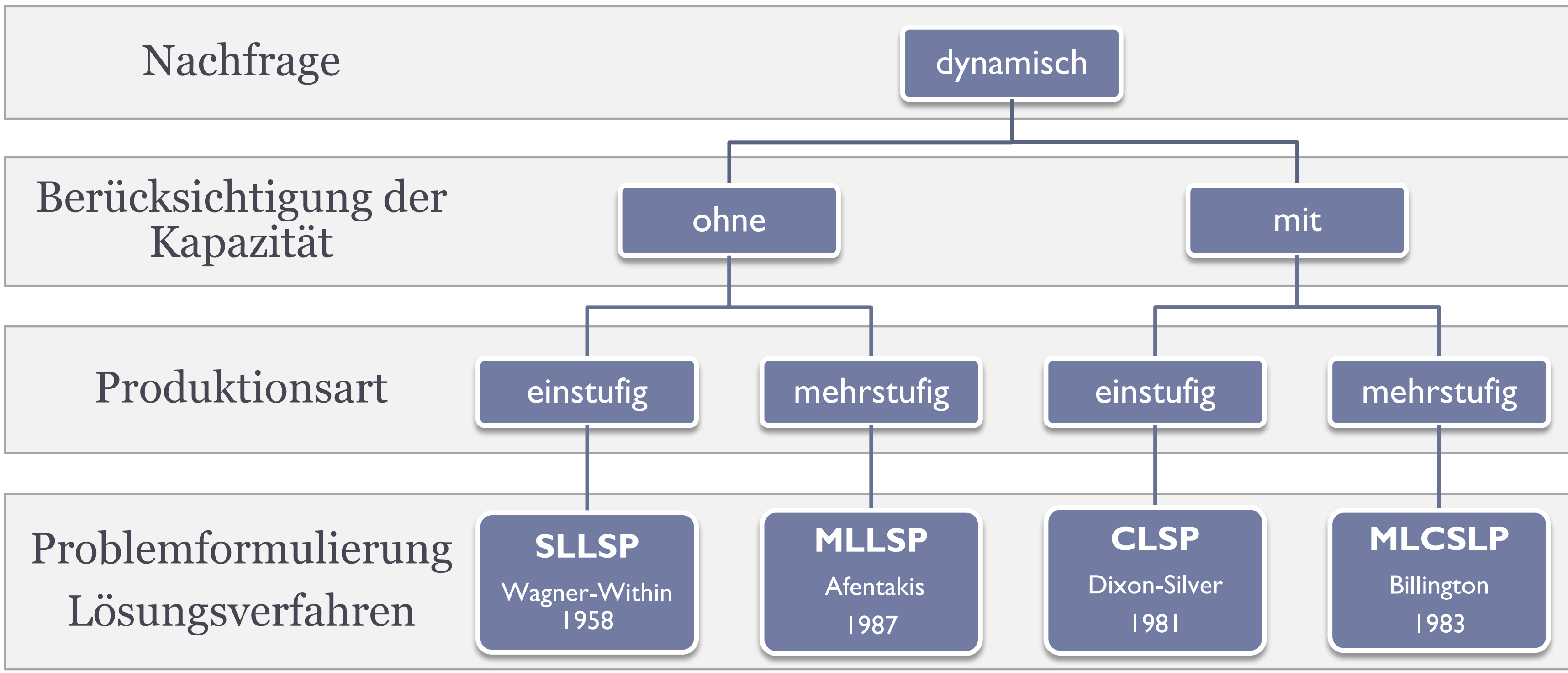
- Interdependenzen im Produktionsbereich
  - Erstellung des *optimalen Produktionsprogamms* ist nur möglich, wenn Bestellmengen, Losgrößen und Maschinenbelegung bekannt sind
  - *Optimierung der Losgrößen*, Bestellmengen und Maschinenbelegung kann nur erfolgen, wenn das Produktionsprogramm feststeht
    - ein globales Optimum kann nur mit *simultaner Planung* erfolgen

- Komplexität der Optimierungsmodelle
  - eine geeignete Formulierung lässt sich im Rahmen eines linearen *gemischt-ganzzähligen Optimierungsmodells* lösen
  - Modelle dieser Art gehören zur Klasse der Probleme, die die *obere Schranke der Komplexität* definieren
    - Simultanplanungsansätze für global optimale Lösungen sind für *praxisrelevante Problemgrößen* nicht verfügbar

Klassifikationsmerkmale

Informationsgrad	deterministisch / stochastisch
Zeitliche Entwicklung	statisch / dynamisch
Wahl des Planungszeitraumes	endlich / unendlich
Anzahl der Produkte	ein Produkt / mehrere Produkte
Anzahl der Dispositionsstufen	einstufige / mehrstufige Modelle
Beachtung von Kapazitäten	Ressourcen/ Finanzmittel
Zu berücksichtigende Kosten	Rüst- / Lager- / Produktionskosten
Art der Produktweitergabe	offene / geschlossene Fertigung
Erzeugnisstruktur	seriell / konverg. / diverg. / generell

Modellklassifikationen



Hilfsoptionen

- Reformulierung der Variablen
  - die schärfere Modellformulierung soll eine bessere Näherung der konvexen Hülle des Lösungsraums darstellen
  - Nuztung von bereits existierenden und gut untersuchten Lösungsansätzen des reformulierten Modells
- Aufnahme von zusätzlichen Ungleichungen
  - Einschränkung der Menge von zulässigen Lösungen
  - Darstellung des Lösungsraumes als konvexe Hülle aller ganzzahligen Extrempunkte (für LP-Relaxation sinnvoll)
- **Ziel**
  - Verringerung des Rechenaufwandes, Komplexitätsreduktion

Einstufiges Losgrößenproblem

- Ausgangssituation
  - *Einprodukt-Unternehmen* mit Losfertigung
  - endlicher Planungshorizonz *T*
  - zeitlich veränderliche (*dynamische*) Nachfrage d_t mit $t \in T$
  - vorgegebener Lagerbestand y_t mit *Lagerkostensatz* h
  - konstante, losgrößenunabhängige *Rüstkosten* s
  - vorgegebene Produktionskosten p_t bei Losgröße q_t
  - *keine Restriktionen* im Produktionsbereich
- Ziel
  - kostenminimale Losgröße
  - vollständige und termintreue Befriedigung der Nachfrage

Single Level Uncapacitated Lot Sizing Problem

$$Z = \sum_{t=1}^{T} \overbrace{\boxed{s \cdot \gamma_t}}^{\text{Rüstkosten}} + \overbrace{\boxed{h \cdot y_t}}^{\text{Lagerkosten}} + \overbrace{\boxed{p_t \cdot q_t}}^{\text{Produktionskosten}} \Rightarrow \min!$$

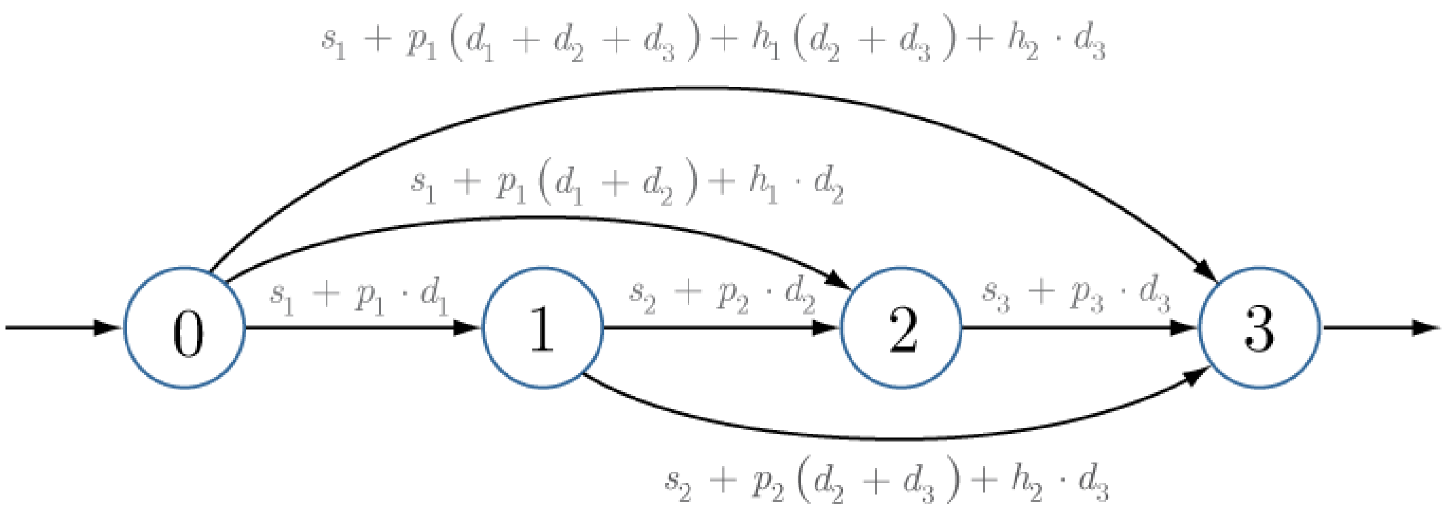
1. $y_{t-1} + q_t - y_t = d_t$ $\quad t \in T$
2. $q_t - M \cdot \gamma_t \leq 0$ $\quad t \in T$
3. $q_t, y_t \geq 0$ $\quad t \in T$
4. $\gamma_t \in \; 0,1$

Lösung des SLULSP-Problems

- Exaktes Verfahren: Wagner-Within (1952)
  - Dynamische Programmierung mit $O(n^2)$-Aufwand
  - Im kostenminimalen Optimum wird der Bedarf niemales teilweise aus dem Lager und teilweise aus aktueller Produktion gedeckt:
    - Strategie 1: Bedarfsbefriedigung *aus aktueller Produktion*
    - Strategie 2: Deckung des Bedarfes *aus Lagerbeständen*
  - Im Optimum wird nur dann produziert, wenn keine Lagerbestände vorliegen: *Zero-Inventory-Property*
    - Bei Produktion in einer Periode mit positiven, für die Bedarfs-deckgung nicht ausreichenden Lagerbeständen entfallen die Lagerkosten, falls der *komplette Periodenbedarf* produziert wird.
    - Die optimale Losgröße setzt sich immer aus vollständigen Periodenbedarfen zusammen

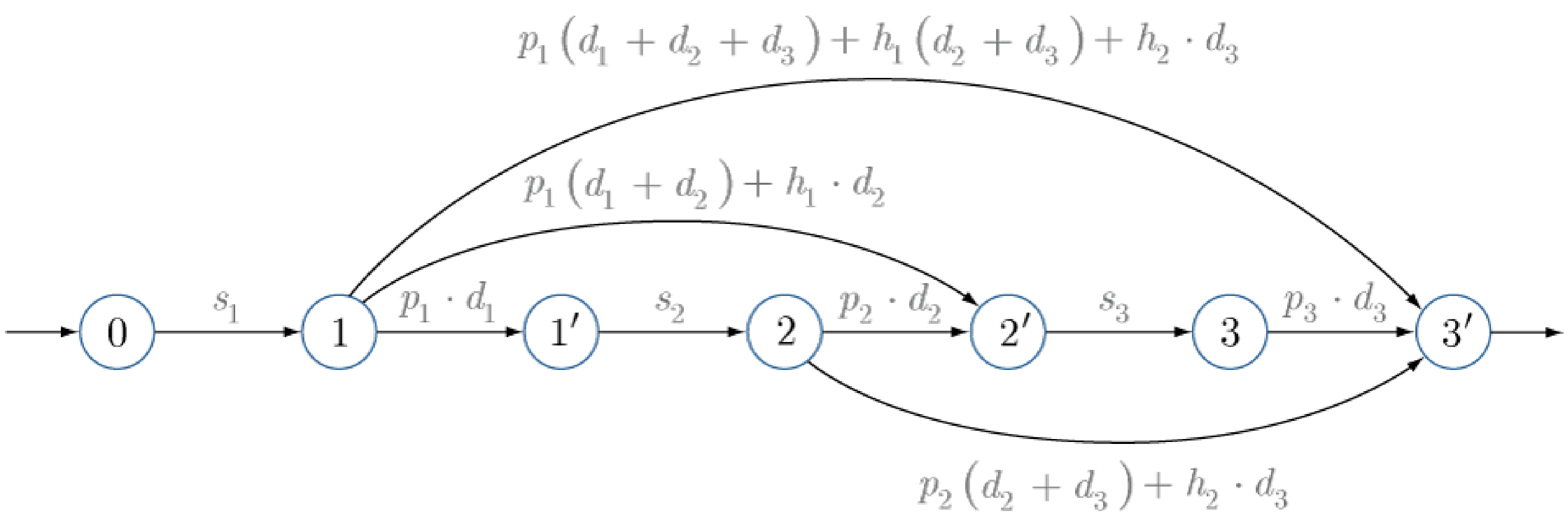
Formulierung als Kürzeste-Wege-Problem

- Knoten als Periodenbedarf und Pfeile als Reichweite der Lose
  - ein Los als Summe von kompletten Periodenbedarfen definiert
  - Eine zulässige Lösung des Problems in dieser Formulierung entspricht einem vollständigen Weg vom Anfangs- bis zum Endknoten
  - bei der optimalen Lösung ist die Summe aus Rüst-, Lager- und Produktionskosten minimal



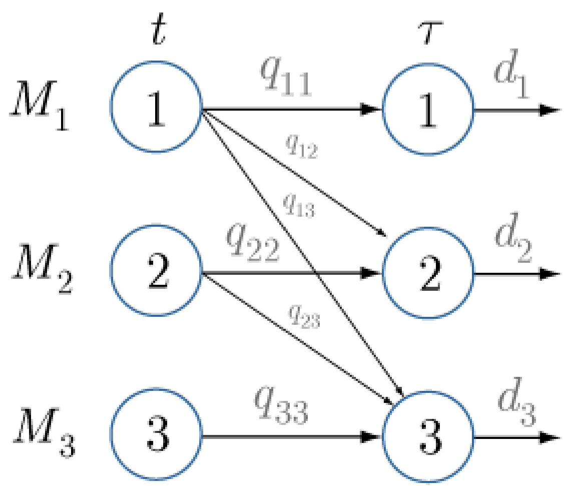
Formulierung als Kürzeste-Wege-Problem II

- Berücksichtigung von weiteren Parametern möglich
  - explizite Erfassung von Rüstkosten / -zeiten
  - Modellierung von Verfallsdaten bzw. maximalen Lagerdauern
    - Entfernen von Pfeilen aus dem Netzwerk, die eine Überschreitung der maximalen Lagedauer des Produktes bedeuten würden



Formulierung als Standortproblem

- Multiples Standortproblem mit spezieller Struktur der möglichen Transportverbindungen
  - Darstellung von *Produktionszeitpunkten* als potentielle Standorte
  - *Bedarfszeitpunkte* als Nachfrageorte
  - Ein *Rüstvorgang* entspricht der Wahl eines Standortes
  - *Lagerung* bedeutet Transport der Produktmente über die Zeit



Berücksichtigung von Kapazitätsrestriktionen

- Änderung der Ausgangssituation
  - Fertigung von mehreren Produkten k
  - *Interdependenzen* zwischen einzelnen Produkten in Form einer gemeinsamen Ressource zwingen zur *gemeinsamen Planung*
    - Ermittlung der Fertigungsreihenfolge findet nicht statt
    - Reduktion auf mehrere Einprodukt-Modelle ist nicht möglich
  - Beanspruchung der Ressource j in Periode t darf die vorgegebene Kapazität b_{jt} nicht überschreiten
- Ziel
  - kostenminimale Losgröße
  - vollständige und termintreu Befriedigung der Nachfrage
  - Einhaltung von Kapazitätsrestriktionen

Das CLSP-Modell

$$Z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T} \overbrace{\boxed{s_k \cdot \gamma_{kt}}}^{\text{Rüstkosten}} + \overbrace{\boxed{h_k \cdot y_{kt}}}^{\text{Lagerkosten}} + \overbrace{\boxed{p_{kt} \cdot q_{kt}}}^{\text{Produktionskosten}} \Rightarrow \min!$$

1. $y_{k,t-1} + q_{kt} - y_{kt} = d_{kt}$ $\quad t \in T; k \in K$
2. $q_{kt} - M \cdot \gamma_{kt} \leq 0$ $\quad t \in T; k \in K$
3. $\sum_{k=1}^{K} tb_{jk} \cdot q_{kt} + tr_{jk} \cdot \gamma_{kt} \leq b_{jt}$ $\quad j \in 1; k \in K$
4. $q_{kt}, y_{kt} \geq 0$ $\quad t \in T; k \in K$
5. $y_{k0},\ y_{kT} = 0$ $\quad k \in K$
6. $\gamma_t \in \ 0,1$

Lösungsansätze

- Exakte Verfahren
  - Bereits das Finden einer *zulässigen Lösung* eines CLSP-Problems gehört zu einer Klasse von Problemen, die die obere Schranke für Komplexität definiert
  - Ausweg: alternative Modellierungstechniken
- Mathematische Heuristiken
  - Mathematische Heuristiken mit *LP-Programmierung* (*Maes*)
  - *Branch & Bound* -Heuristik
- Spezielle oder allgemeine Heuristiken
  - Periodenbetrachtung (*Dixon*)
  - Dekompositionsverfahren (*Stadtler*)

Heuristische Methoden: das Dixon-Verfahren

- Bei *Kapazitätsüberlastung* muss ein Teil der Periodenbedarfsmenge *zu höheren Kosten* in früheren Perioden produziert werden.

- Als Entscheidungskriterium bei der Frage, Produktion welcher Produkte vorgezogen wird, dienen *Prioritätsziffern*
  - Berücksichtigung des *Kostenaspekts* (Silver-Meal-Kriterium)
  - Beanspruchung von *Ressourcen* (Stückbearbeitungszeiten)

$$\Delta_{k\tau} = \underbrace{\boxed{c_{k\tau j}^{Per} - c_{k\tau,j+1}^{Per}}}_{\text{Veränderung der Kosten bei Erhöhung der Losgröße um den Bedarf der Periode j+1}} \Big/ \overbrace{\boxed{tb_k \cdot d_{k,j+1}}}^{\text{zusätzlicher Kapazitätsbedarf}} \qquad k \in K \mid d_{k,j+1} > 0$$

1. Initialisierungsphase

- Existenz einer zulässigen Lösung
  - reicht gesamte vorhandene Kapazität für die Fertigung von geforderten Bedarfe überhaupt aus?

$$\sum_{j=1}^{t} CB_j \leq \sum_{j=1}^{t} b_j \qquad t \in T$$

- Bestimmung der verbleibenden freien Kapazität
  - welche Kapazität kann zur vorgezogenen Produktion zukünftigen Bedarfsmengen verwendet werden?

$$RC_\tau = b_\tau - \sum_{k=1}^{K} tb_k \cdot q_{k\tau}$$

2. Schranke für zulässige Lösung

- Bestimmung der Periode mit Kapazitätsüberschreitung
  - in welcher frühesten Periode reichen die subsummierten Kapazitätsbedarfe für aktuell betrachtete Kombination von Losgrößen nicht mehr aus?

$$\sum_{j=\tau+1}^{t} CV_{\tau j} \geq \sum_{j=\tau+1}^{t} CF_{\tau j} \qquad \tau \in \{T-1\}; t > \tau$$

- Sicherstellung der zulässigen Lösung
  - die in der Produktionsperiode hergestellte Menge soll Fehlbedarfe zukünftiger Perioden decken

3. Vergrößerung der Produktionsmengen

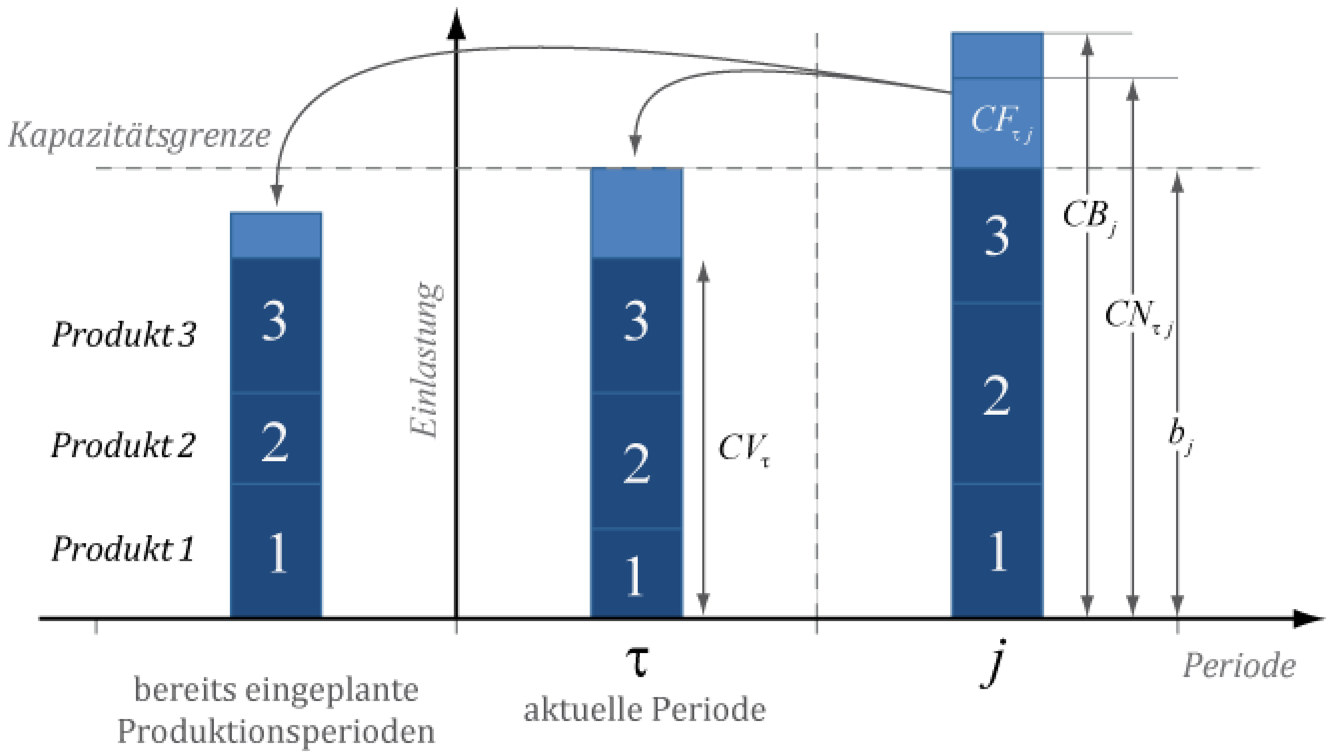
- Ausweitung der Produktionsmenge aktueller Periode
  - ist die vorgezogene Fertigung von Fehlmengen a. *möglich* und b. aus Kostengründen *vorteilhaft*?

$$M = \ k \,|\, r_{k\tau} < t_c - \tau \text{ und } d_{k,t+r_{k\tau}+1} \cdot tb_k \leq RC_\tau$$

- Auswahl der Produkte für vorgezogene Fertigung
  - Herstellung welcher Produkte verspricht die größte relative Kosteneinsparung anhand der Prioritätsziffer
  - Die *Prioritätsziffer* spiegelt die marginale Kostenveränderung pro zusätzliche Kapazitätseinheit wider
    - eine positive Kennziffer impliziert eine Kostensenkung
    - ist sie negativ, so lohnt sich die Vergrößerung der Reichweite nicht

4. Zulässigkeit des Produktionsplans

- Erstellung eines zulässigen Produktionsplans
  - muss die Produtionsmenge eines Produtkes vorgezogen werden?



5. Ermittlung des Kapazitätsfehlbedarfes

- Bestimmung bereitzustellender Kapazität
  - wie viel Kapazität muss in aktueller Periode noch belegt werden, um in den Folgeperioden mit verfügbarer Kapazität auszukommen?

$$Q = \max_{t_c \leq t \leq T} \left\{ \sum_{i=\tau+1}^{t} CF_{\tau j} - CV_{\tau j} \right\}$$

- Kapazitätsfehlbedarf
  - ergibt sich aus der Differenz der *kumulierten Fehlkapazität* und in aktueller Periode bereits reservierten Kapazität
  - *Wichtig*: ein Teil des Bedarfes einer zukündtigen Periode kann bereits in einer vorangenangenen Iteration produziert word sein

6. Erhöhung der Reichweite

- Ausweitung der Produktion
  - wie muss die Reichweite erhöht werden um den vorgegebenen Kapazitätsfehlbedarf zu decken?

$$r_{k\tau}^{neu} = \min\left\{ r_{k\tau}+1, r_{k\tau} + \frac{Q}{tb_k \cdot d_{k,\tau+r_{k\tau}+1}} \right\}$$

- Auswahl der Produkte
  - vorgezogene Fertigung welcher Produkte ist mit minimalen Kostenanstieg verbunden?

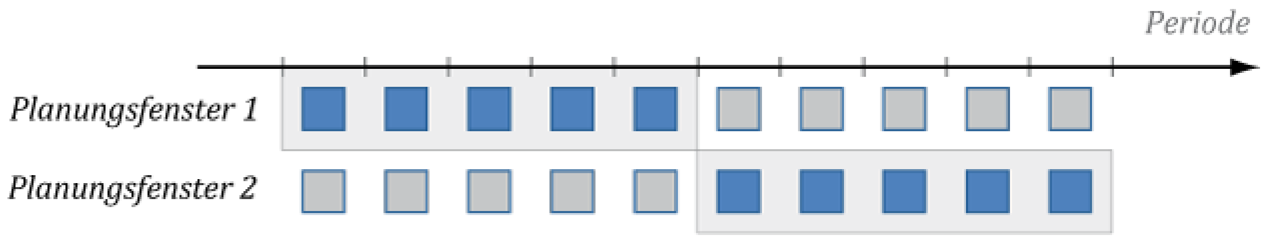
$$\Delta_{k\tau}^{Periodenteilbedarf} = \frac{c_{k\tau,\tau+r_{k\tau}}^{Per} - c_{k\tau,\tau+r_{k\tau}^{neu}}^{Per}}{Q}$$

Modifikation des Dixon-Verfahrens

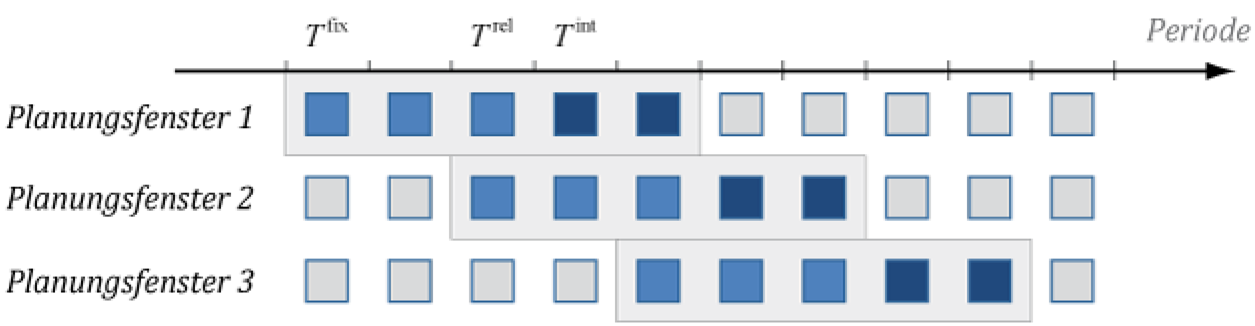
- *Period-to-Period*-Problematik
  - vorgezogene Herstellung von Bedarfen aus Perioden, in denen ausfgrund von Kapazitätsrestriktionen in Folgeperioden produziert werden muss
  - die erhofften Rüstkostenersparnisse werden nicht realisiert, so dass bei einer Fertigung des vollen Bedarfes in der Folgeperiode Lagerkosten vermieden werden können
    - die vorgezogenen Produktionsmengen sollen in die Folgeperiode zurück verlegt werden
- Vermeidung der Nachteile im Rahmen von Modifikationen
  - *sukzessive Verbesserung* einer existierenden Lösung
  - Vergleich der Lösungsgüte einzelner Verfahren

Dekompositionsverfahren von Stadtler

- *Splitting des Zeitraumes* in kürzere Zeitabschnitte mit einer Planungsgröße, die sich *exakt* lösen läßt



- Berücksichtigung von Überlappungen zwischen Teilperioden oder *rollieredender Planung*



LP-Programmierung: Verfahren von Maes

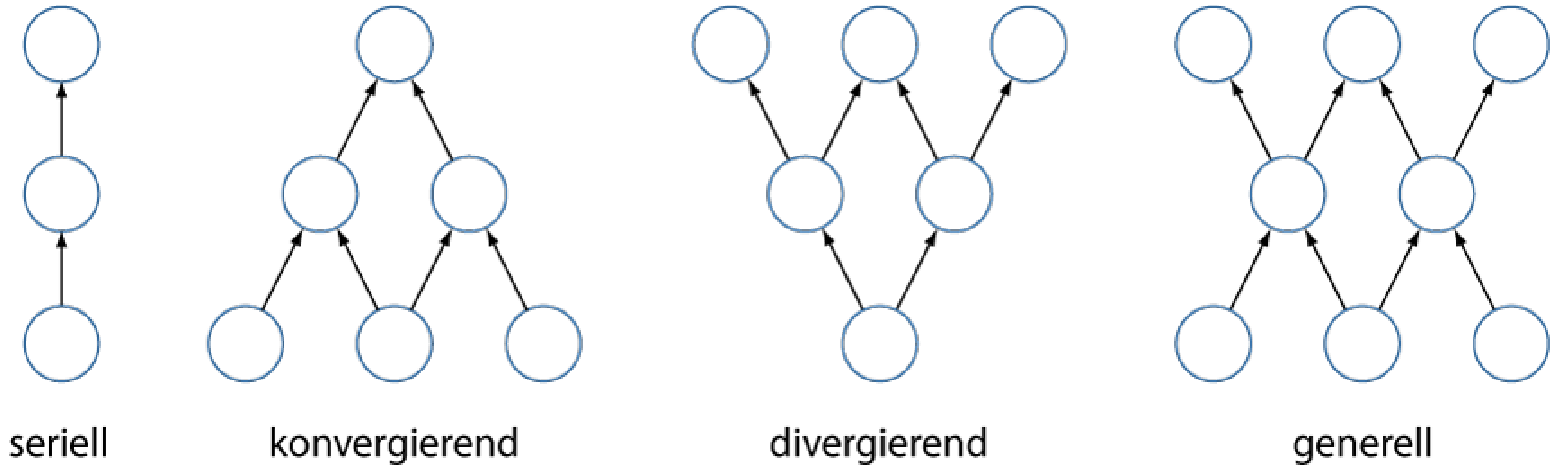
- Problem der linearen Programmierung:
  - Aufnahme der Rüstvariablen in Binärform machen den Einsatz der Methoden linearer Programmierung unmöglich
  - **Lösung**: Definiere Rüstvariablen nicht als *Binärvariablen* {0,1}, sondern als Variable mit *Definitionsbereich* [0;1]

- Vorgehensweise:
  1. Bildung einer Zielfunktion mit neuen Rüstvariablen
  2. Lösung des Modells mit *exakten Verfahren*
     - Die Ausgangslösung ist aufgrund von nicht-ganzzähligen Rüstvariablen nicht realisierbar!
  3. *Sukzessive Fixierung* der Rüstvariablen nach einem Auswahlkriterium (z.B. Globales-Maximum-Prinzip) in mehreren Iterationsschritten

Mehrstufige Fertigung

- Darstellung von Fertigungsstrukturen *grafisch* als Gozintograph, *tabellarisch* in Form von Stück- oder Gozintolisten oder *in Matrixform* als Direktbedarfsmatrix

- Interdependenzen zwischen einzelnen Erzeugnissen in Form von *Input-Ouput-Beziehungen* und *beschränkten Ressourcen*



Das MLCLSP-Modell

$$Z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T} \overbrace{\boxed{s_k \cdot \gamma_{kt}}}^{\text{Rüstkosten}} + \overbrace{\boxed{h_k \cdot y_{kt}}}^{\text{Lagerkosten}} + \overbrace{\boxed{p_{kt} \cdot q_{kt}}}^{\text{Produktionskosten}} \Rightarrow \min!$$

1. $y_{k,t-1} + q_{kt-z_k} - \left(y_{kt} + \sum_{i \in \mathcal{N}_k} a_{ki} \cdot q_{it} \right) = d_{kt} \qquad t \in T; k \in K$
2. $q_{kt} - M \cdot \gamma_{kt} \leq 0 \qquad t \in T; k \in K$
3. $\sum_{k=1}^{\mathcal{K}_j} tb_k \cdot q_{kt} + tr_k \cdot \gamma_{kt} \leq b_{jt} \qquad j \in J; t \in T$
4. $\gamma_{kt} \in \{0,1\} \qquad t \in T; k \in K$
5. $q_{kt}, y_{kt} \geq 0 \qquad t \in T; k \in K$
6. $y_{k0}, \; y_{kT} = 0 \qquad k \in K$

Lösungsansatz: Verfahren von Derstroff

- Reformulierung des Modells mit systemweiten Lagerbestand
  - *Standardvorgehen:* Verwendung eines Produktes in einem Arbeitsgang führt zur Reduktion seines Bestandes und zur Erhöhung des Bestandes des übergeordneten Produktes.
  - *Systemweiter Lagerbestand:* betrachte nur den Wertzuwachs, den ein Produkt bei Bearbeitung auf der entsprechenden Produktionsstufe erfährt:

$$E_{kt} = y_{kt} + \sum_{j \in \mathcal{N}_k^*} v_{kj} \cdot y_{jt} \qquad k \in K; t \in T$$

    - die Kosten des systemweiten Lagerbestandes betragen

$$e_k = h_k + \sum_{j \in \mathcal{V}_k} a_{kj} \cdot h_j \qquad k \in K$$

Verfahren von Derstroff II

- Neues Modell mit relaxierten Nebenbedingungen
  - Durch Lagrange-Relaxation der Lagerbilanzgleichung sowie der Kapazitäsrestriktionen wird MLCSLP in mehrere voneinander *unabhängige SLULSP-Probleme* zerlegt

$$Z = \sum_{k=1}^{K} \sum_{t=1}^{T} s_k \cdot \gamma_{kt} + e_k \cdot \; T - t + 1 \; q_{kt}$$

Lagrangemultiplikator der Lagerbilanzgleichung

$$+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{K} \sum_{t=1}^{T} \boxed{w_{kt}} \; \textit{Lagerbilanzgleichung}$$

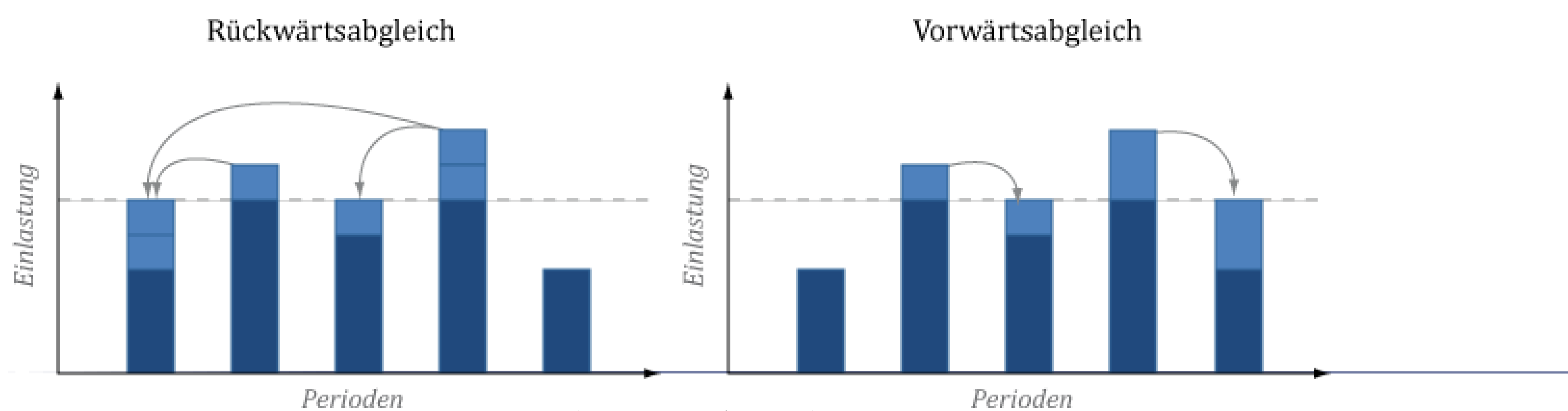
Lagrangemultiplikator der Kapazitätsrestriktion in Periode t

$$+ \sum_{\tau=1}^{T} \boxed{u_t} \; \textit{Kapazitätsrestriktion in } t \;\; \Rightarrow \min!$$

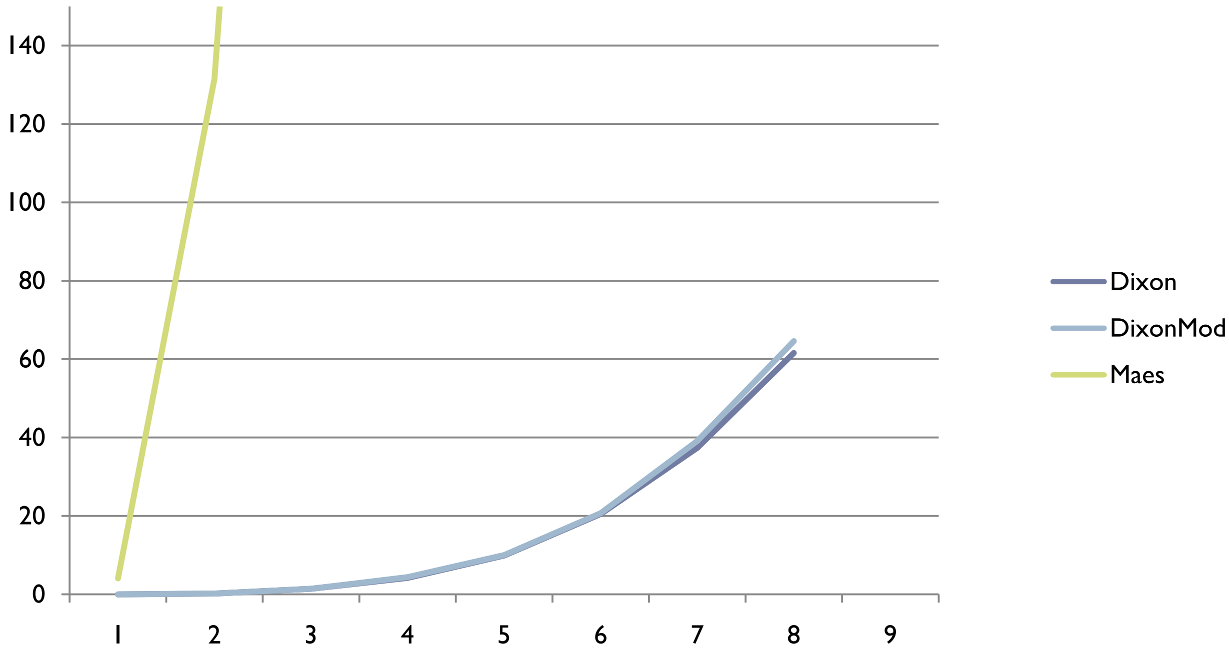
u.d.N. ...

Verfahren von Derstroff III

- Bestimmung der unteren Schranke
  - die Lösungen einzelner *dynamischer unkapazitierten* Einprodukt-Losgrößenrobleme bilden die untere Schranke
  - die Lagrange-Multiplikatoren werden anschliessend in *mehreren Iterationen* abgestimmt
- Bestimmumg der oberen Schranke
  - in so ermittelten (nicht-zulässigen) Produktionspläne werden zunächst Fehlmengen und dann Kapazitätsüberlastungen beseitigt

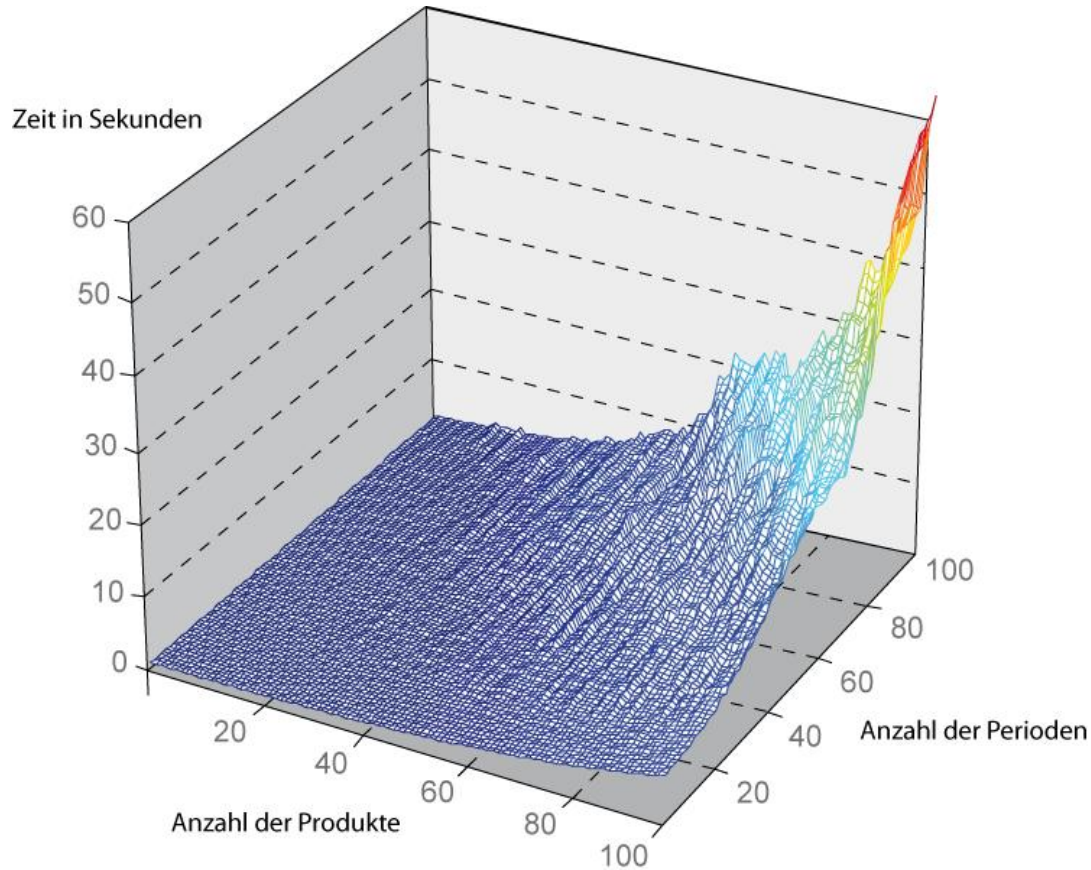


Numerische Untersuchung

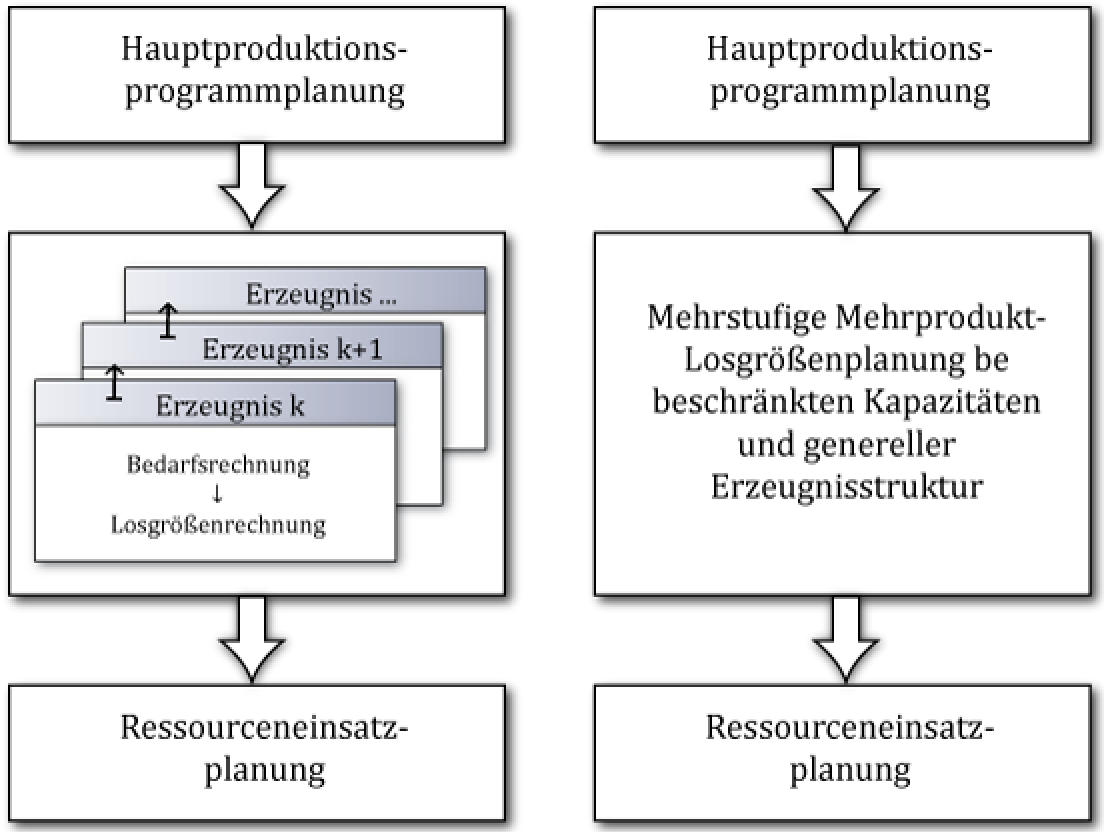


Verfahren	Woche	Monat	Quartal	Halbjahr	7 Monate
DIXON	0,0017	0,2153	4,2153	37,4001	61,5922
DIXON$_{\mathrm{Mod}}$	0,0018	0,2160	4,4064	39,1435	64,5907
MAES	4,0000	131,5864	1095,7535	–	–

Laufzeitverhalten des mod. Dixon-Verfahrens



Vergleich von Sukzessiv- und Simultanplanung



CLSP und MLCLSP
Danke für ihre Aufmerksamkeit

Florian Klatt
Andreas Rudi