



**Seminar zur Industriebetriebslehre III**  
**Thema 10: Das Resource-Constrained Project Scheduling**  
**Problem in der Zeit- und Kapazitätsplanung**

**Cordelia Mühlbach**



Universität Hamburg  
Department Wirtschaftswissenschaften  
Arbeitsbereich Industrielles Management  
Dr. Claudia Höck



# Agenda

---

1. Grundlegende Definitionen
2. Darstellung eines RCPSP
  - 2.1 Mathematische Darstellung der Grundform
  - 2.2 Durchlaufzeitenbeispiel
3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung
4. Fazit



# Agenda

---

1. Grundlegende Definitionen
2. Darstellung eines RCPSP
  - 2.1 Mathematische Darstellung der Grundform
  - 2.2 Durchlaufzeitenbeispiel
3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung
4. Fazit



# 1. Grundlegende Definitionen

---

- **Resource-Constrained Project Scheduling Problem**
  - Abhängigkeit eines Projektes von den verwendeten Ressourcen
  - Erstellung eines Ablaufplanes durch Verteilung der beschränkten Ressourcen
  
- **Ressourcen**
  - Einsatzfaktoren mit knapper Kapazität
    - Erneuerbare Ressourcen (Maschinen)
    - Nicht erneuerbare Ressourcen (Rohstoffe)
    - Doppelt beschränkte Ressourcen (finanzielle Mittel)



# 1. Grundlegende Definitionen

---

## ● Jobs

- Durchzuführende Bearbeitungsschritte bei Projektrealisierung (Gesamtes Produkt)



## ● Aktivitäten

- Bearbeitungsschritte innerhalb eines Jobs (Einzelteile)





# Agenda

---

1. Grundlegende Definitionen
2. Darstellung eines RCPSP
  - 2.1 Mathematische Darstellung der Grundform
  - 2.2 Durchlaufzeitenbeispiel
3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung
4. Fazit



## 2. Darstellung eines RCPSP

---

**„A Project, given by a finish-to-start network has to be realized“**

Quelle: Klein, 2000, S. 77



## 2. Darstellung eines RCPSP

---

- **Job Shop Bearbeitung (Erstellung eines Produktionsprogramms):**
  - Die Aktivitäten eines Jobs dürfen nicht gleichzeitig auf mehreren Maschinen ausgeführt werden
  - Anzahl der Aktivitäten identisch mit der Anzahl der Maschinen: ( $A=M$ )
    - $J$  = Anzahl der Jobs*
    - $M$  = Anzahl der Maschinen*
    - $A$  = Anzahl der einzelnen Aktivitäten innerhalb eines Jobs*
- RCPSP als beispielhafte Darstellung des Job-Shop Problems





## 2. Darstellung eines RCPSP

---

- **Flow Shop Bearbeitung**

- Ex Ante Festlegung: Ein bestimmter Bearbeitungsschritt wird auf einer bestimmten Maschine ausgeführt
- Jeder Auftrag (Job) wird von den Maschinen in der gleichen Reihenfolge bearbeitet
- *Identische Maschinenfolge*
- Eingeschränktes Job Shop Modell



# Agenda

---

1. Grundlegende Definitionen
2. Darstellung eines RCPSP
  - 2.1 Mathematische Darstellung der Grundform**
  - 2.2 Durchlaufzeitenbeispiel
3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung
4. Fazit



## 2. 1 Mathematische Darstellung der Grundform eines RCPSP

---

### **Prämissen:**

- Jeder Job (Aktivität) kann nur auf eine bestimmte Art und Weise ausgeführt werden
- Die Jobs können nur mit dem Einsatz der Ressourcen vollendet werden

### **Ressourcenbeschränkungen:**

- Fixe Verarbeitungsdauer
- Fixer Kapazitätsverbrauch



## 2. 1 Mathematische Darstellung der Grundform eines RCPSP

---

### Vorgehensweise:

1. Schritt: Modellierung von Binärvariablen
2. Schritt: Erarbeitung von Prioritätsregeln
3. Schritt: Aufstellung der Kapazitätsrestriktionen

Bei diesen Modellen wird immer die gleiche Vorgehensweise benutzt

### ***Oberziel des RCPSP***



***Minimierung der gesamten Durchlaufzeit eines Projektes***



## 2. 1 Mathematische Darstellung der Grundform eines RCPSP

---

$$j = 1, \dots, J$$

$$j \in P_j$$

*Festlegung der Anzahl der Jobs*

$$r = 1, \dots, R$$

$$r \in R$$

*Ressourcen*

$$K_{rt}$$

*Menge der gesamt verfügbaren Ressourcen pro Periode*

$$t = 1, \dots, T$$

*Zeit: Periode  $t$ ,  $T$  als gesamte Projektdurchlaufzeit (max.)*

$$d_j$$

*Bearbeitungszeit eines Jobs*

$$x_{jt}, j = 1, \dots, J, t = EF_j, \dots, LF_j,$$

$$x_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{wenn der Job } j \text{ am Ende der Periode } t \text{ beendet ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

*Binärvariablen:*

*$EF_j$  = frühestmögliche Fertigstellungszeit*

*$LF_j$  = spätestmögliche Fertigstellungszeit*

Quelle: Sprecher, Kolisch, Drexel, 1995, S. 96



## 2. 1 Mathematische Darstellung der Grundform eines RCPSP

---

- Formale Darstellung der Ressourcenabhängigkeiten

$$(1) \quad \sum_{t=EF_j}^{LF_j} x_{jt} = 1 \quad j=1,\dots,J \text{ und } t = EF_j,\dots,LF_j$$

$$(2) \quad \sum_{t=EF_j}^{LF_k} tx_{it} \leq \sum_{t=EF_j}^{LF_j} (t - d_j) x_{jt} \quad j = 2,\dots,J \text{ und } i \in P_j$$

$$(3) \quad \sum_{j=1}^J k_{jr} \sum_{\tau=t}^{t+d_j-1} x_{jr} \leq K_{rt} \quad t = 1,\dots, T$$

$k_{jr}$  = tatsächlich verbrauchte Ressourceneinheiten  
 $r \in R$

$$(4) \quad x_{jt} \in \{0,1\}$$

Quelle: Sprecher, Kolisch, Drexel, 1995, S. 96



# Agenda

---

1. Grundlegende Definitionen
2. Darstellung eines RCPSP
  - 2.1 Mathematische Darstellung der Grundform
  - 2.2 Durchlaufzeitenbeispiel**
3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung
4. Fazit



## 2.2 Durchlaufzeitenbeispiel

---

- Darstellung anhand des kritischen Weges in einem einfachen Netzplan
  - Beachtung der Ressourcenbeschränkungen
  - Anzahl der durchführbaren Arbeitsschritte
  - Gesamtmenge der verfügbaren Kapazitäten

$j=1,\dots,J$       *Anzahl der Bearbeitungsschritte (Jobs)*

$z_j= 1,\dots,Z$       *Bearbeitungszeit eines einzelnen Jobs*

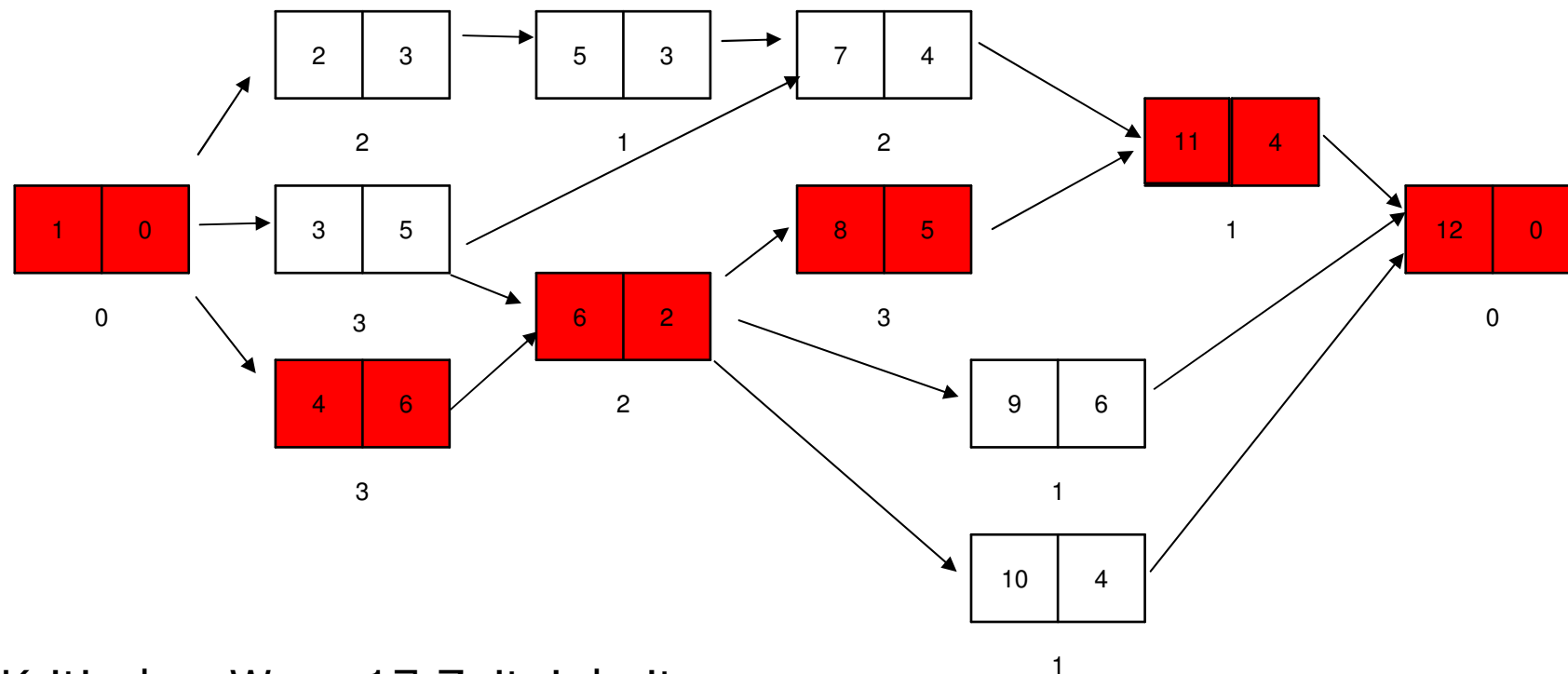
$r_{j1}= 1,\dots,R$       *Menge der verwendeten Ressourcen*

j	$z_j$
$r_{j1}$	





## 2.2 Durchlaufzeitenbeispiel



Kritischer Weg: 17 Zeiteinheiten

Quelle: Klein, 2000, S. 115



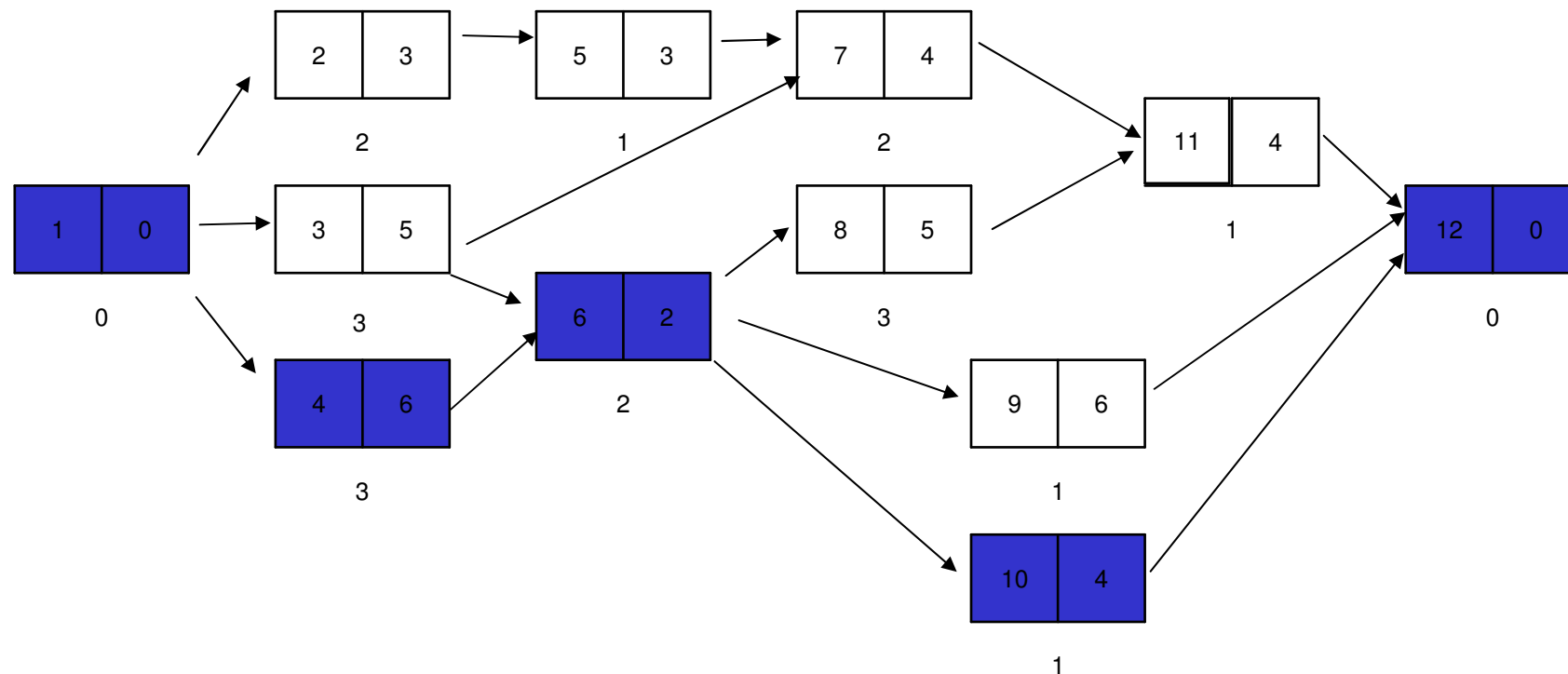
## 2.2 Durchlaufzeitenbeispiel

---

- Variante 1:
  - 1 – 2 – 5 – 7 – 11 – 12
  - DLZ: 14 ZE
- Variante 2:
  - 1 – 3 – 7 – 11 – 12
  - DLZ: 13 ZE
- Variante 3:
  - 1 – 4 – 6 – 9 – 12
  - DLZ: 14 ZE
- Variante 4:
  - 1 – 4 – 6 – 10 – 12
  - DLZ: 12 ZE



## 2.2 Durchlaufzeitenbeispiel



Kürzeste DLZ: 12 ZE

Quelle: Klein, 2000, S. 115



# Agenda

---

1. Grundlegende Definitionen
2. Darstellung eines RCPSP
  - 2.1 Mathematische Darstellung der Grundform
  - 2.2 Durchlaufzeitenbeispiel
3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung
4. Fazit



## 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung

---

- **Zeitplanung**

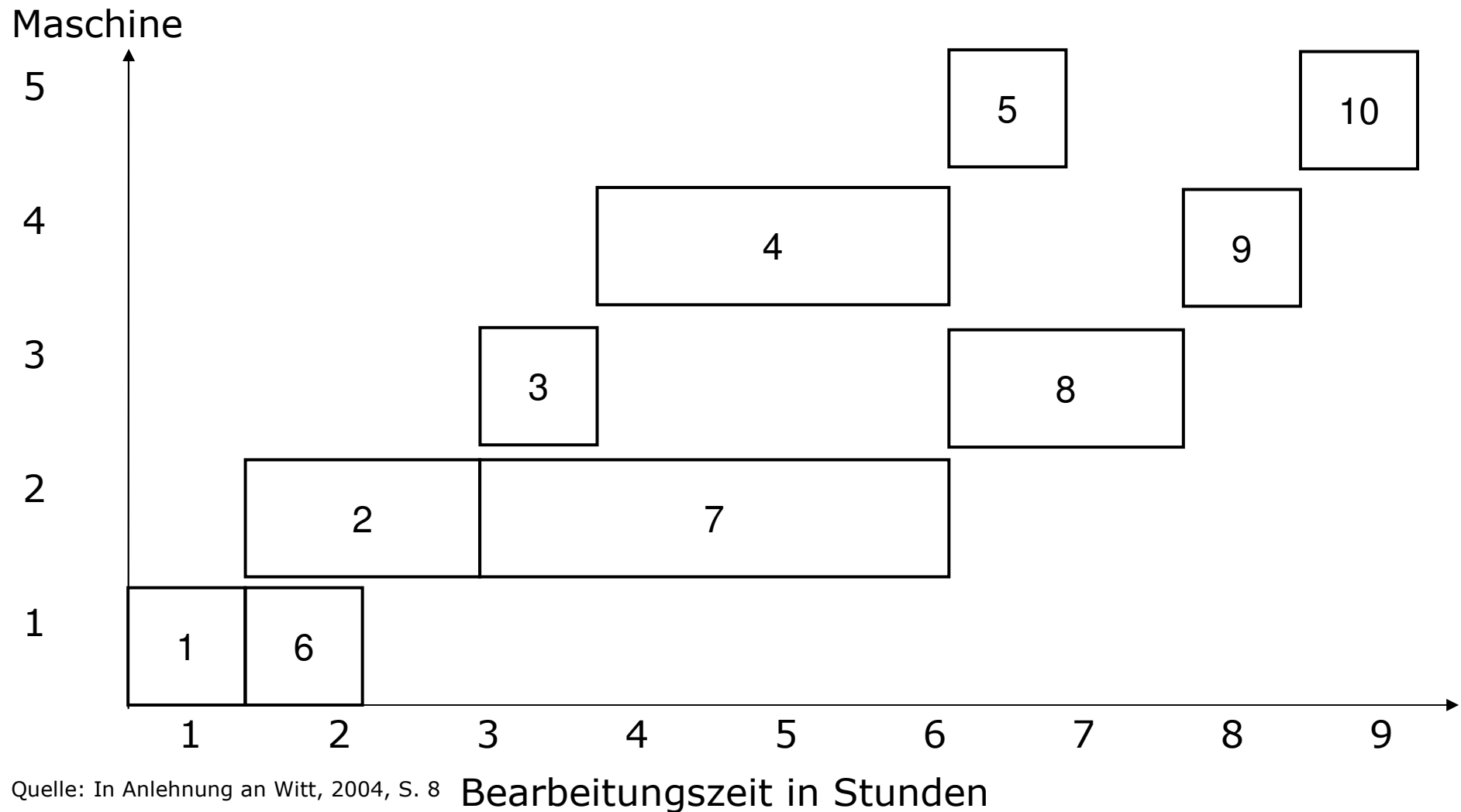
- Sinnvolle Ablaufplanung
- Engpassvermeidung
- Kostenaspekt

- **Kapazitätsplanung**

- Sinnvolle Verwendung des Ressourcen-Einsatzes
- Möglichst hohe Anzahl simultan zu bearbeitender Aufträge
- Kostenaspekt



### 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung

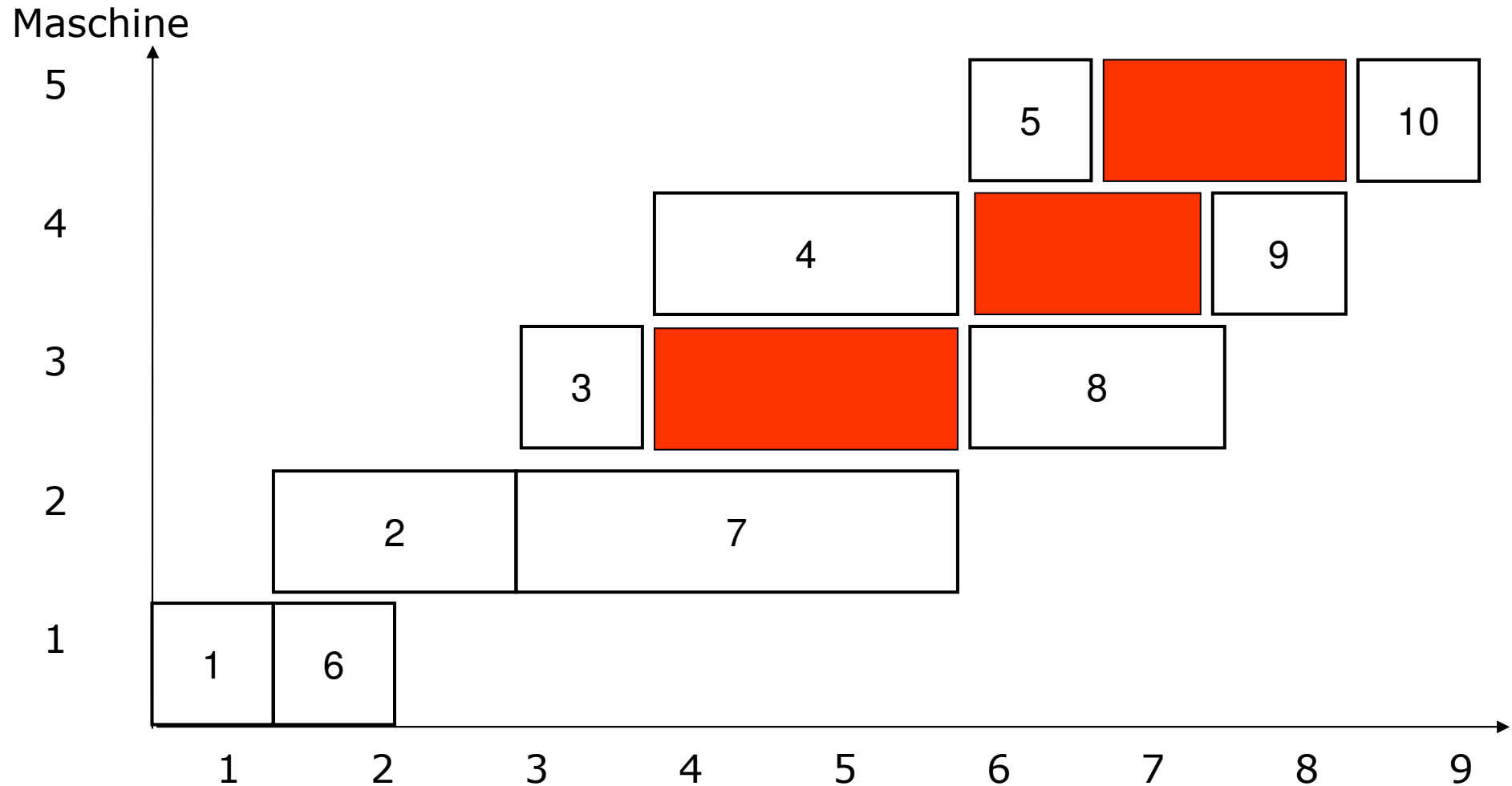


Quelle: In Anlehnung an Witt, 2004, S. 8

Bearbeitungszeit in Stunden



### 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung



Quelle: In Anlehnung an Witt, 2004, S. 8

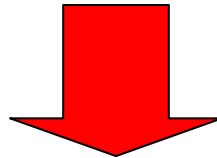


## 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung

---

- **Deadline Problem**

- Zeitvorgabe: 6 Stunden (Deadline)
- Beim ersten Durchgang eingehalten
- Beim zweiten Durchgang 8 Stunden

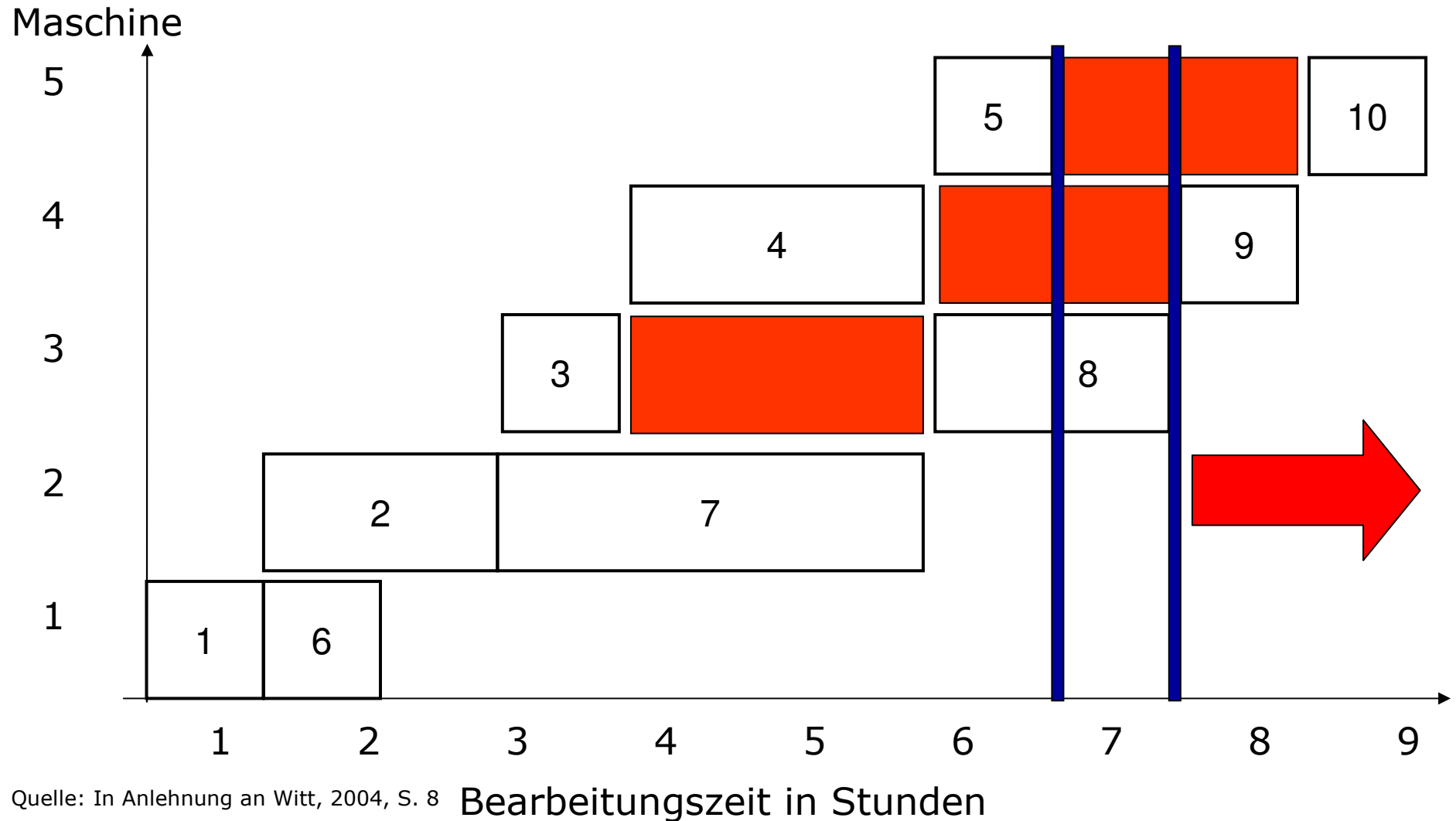


***Deadline überschritten***





### 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung



Quelle: In Anlehnung an Witt, 2004, S. 8

Bearbeitungszeit in Stunden



## 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung

---

### ● **Budgetproblem**

- Ressourcenkapazität fast ausgeschöpft, aber Produktionsprogramm noch nicht fertig gestellt
- Dadurch verlängerte Durchlaufzeit → steigende Kosten → Budget wird überschritten → mehr Ressourcen müssen verwendet werden
- Bsp.:
  - Berechnungsfehler bei Ressourcenverbrauch
  - Engpass durch fehlerhaften Durchlauf
  - Zeitaufwand durch Ressourcenneubeschaffung
  - Mehrverbrauch von Ressourcen



### 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung

---

#### **Minimierung der Durchlaufzeit durch:**

Andere Bearbeitungsreihenfolge der Aktivitäten kann evtl. eine Verkürzung der Durchlaufzeit bewirken:

*Wenn: Verkürzung der Durchlaufzeit  $> MZ - TZ$*

➡ *Lösung des Deadline Problems*

• *Funktioniert allerdings nur, wenn nur ein Job ansteht*

➡ ***Für das RCPSP also nicht anzuwenden***

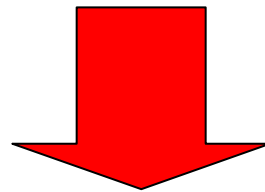


### 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung

---

Lösungsmethoden eines ressourcenabhängigen Projektes:

- Standardlösungsmethoden (MPM/CPM)
  - Verfahren der Netzplantechnik
  - Ermittlung der minimalen Durchlaufzeit bei Projekten mit mehreren Teilaufgaben



***Können aufgrund der Ressourcenbeschränkungen nicht zur Lösung eines RCPSP angewandt werden***



### 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung

---

- Erweiterung des Single Mode RCPSP um mehrere Ressourcenbeschränkungen
- Multi Mode RCPSP als eine Verkomplizierung des Problems, aber realistischere Darstellung
- Man verknüpft einen Modus  $m = 1, \dots, M$  mit einer individuellen Bearbeitungsdauer  $d_{jm}$  und dem spezifischen Kapazitätsverbrauch  $k_{jmr}$  einer bestimmten Ressource  $r$
- Jeder Job muss zunächst die Benutzung der begonnenen Ressource abschließen, ein Wechsel zwischen den Abläufen ist nicht mehr möglich
- Problematik des RCPSP: Lösung auch mit Großrechnern nicht mehr möglich (*zu hoher Zeitaufwand*)



### 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung

---

- Alternative Lösungsvorschläge: Heuristiken
  - Eröffnungsheuristiken
    - Generierung einer neuartigen Eröffnungslösung
  - Meta Heuristiken
    - Greifen dann die generierte Eröffnungslösung auf



***Tabu-Search- Ansatz***



## 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung

---

### **Lösung des MRCPSP durch Branch and Bound Algorithmus**

- Aufstellung von Prioritätsregeln
- Ermittlung eines optimalen Zielfunktionswerts (Abbruchkriterium)
  - Einschränkung der verfügbaren Lösungen auf die nach den Kriterien zulässigen Möglichkeiten

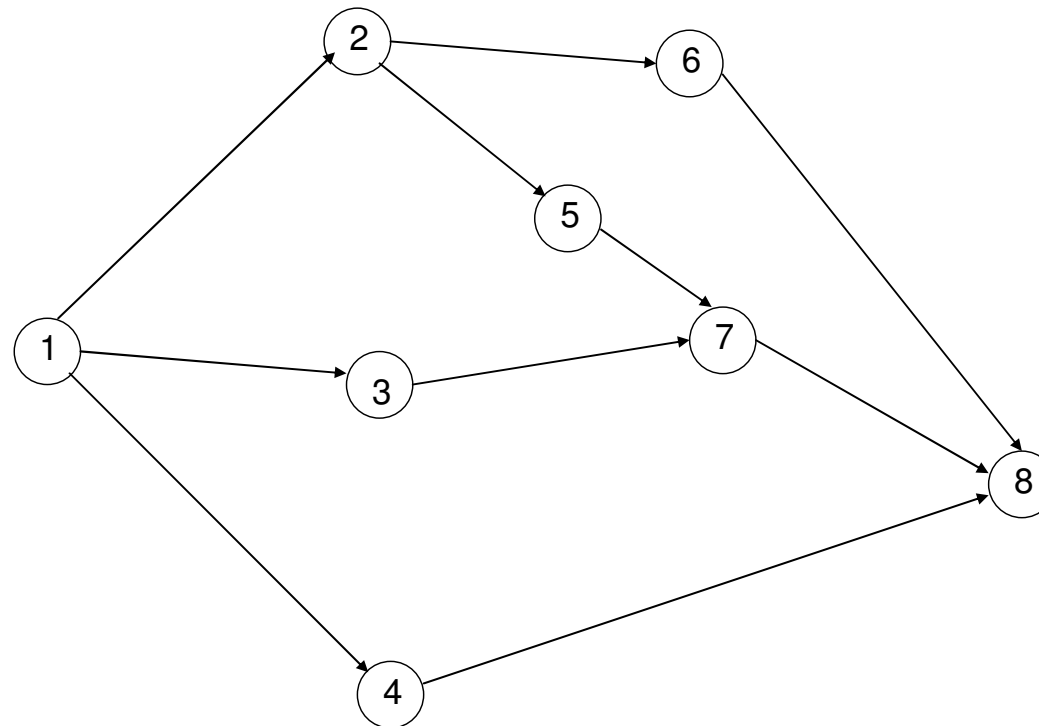
#### *Vorgehensweise:*

- Erstellung eines Precedence Trees (Prioritäten)
- Aufspaltung in Subprobleme zur besseren Lösbarkeit



### 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung

---

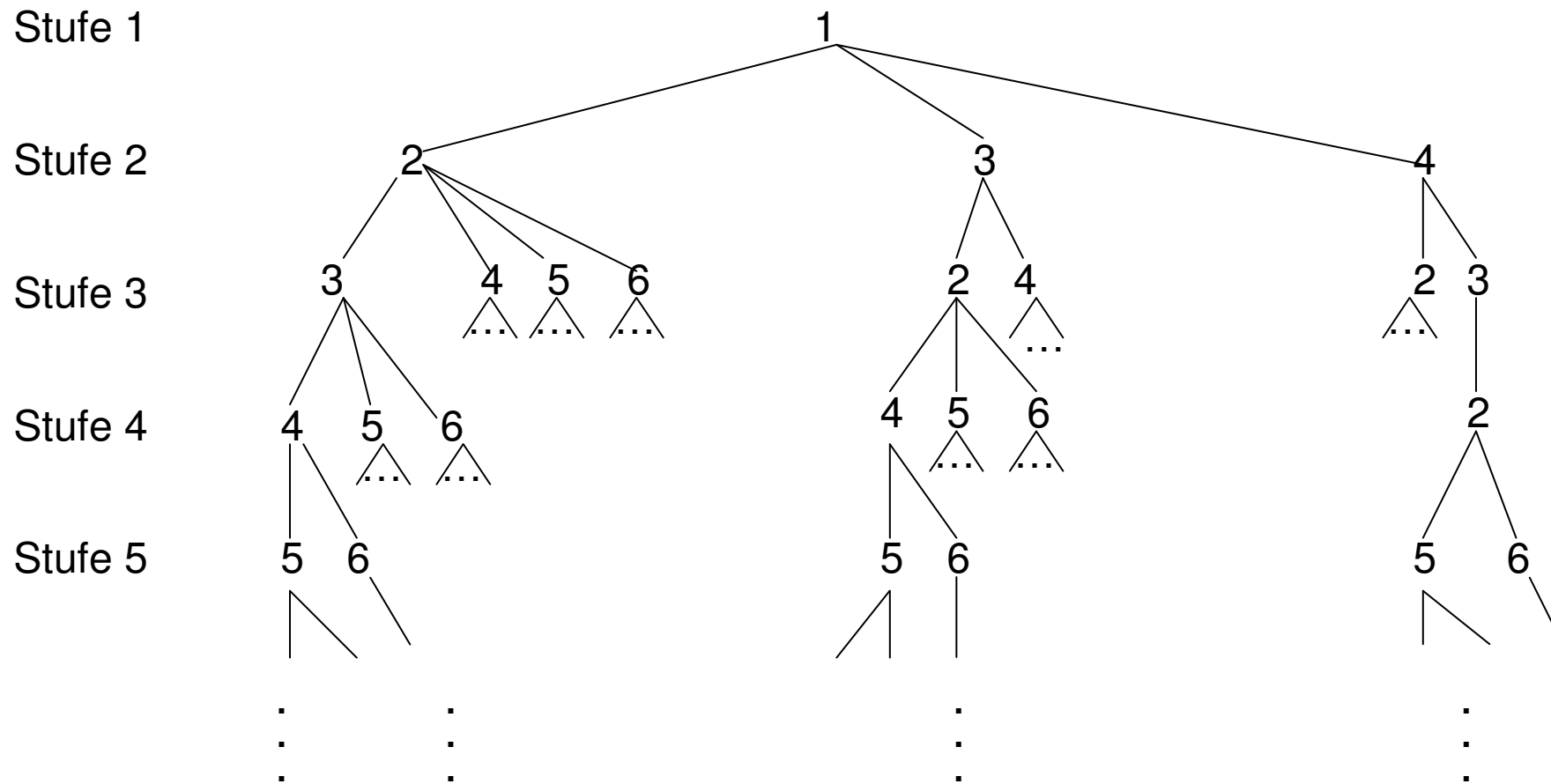


Quelle: Schematischer Ablauf Maschinenbelegung in Anlehnung an Sprecher, 1994, S.35





### 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung



Quelle: Precedence Tree in Anlehnung an Sprecher, 1994, S.36



### 3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung

---

- Precedence Tree soll darstellen, dass eine Aktivität erst starten darf, sobald die vorhergehende beendet ist => keine Parallelbearbeitung
- Erstellung von Prioritätsregeln zur Lösung des MRCPSP auf Basis des Precedence Trees
- Erarbeitung eines individuellen Algorithmus für die jeweilige Problemstellung durch Kombination von Prioritätsregeln mit den generierten Lösungen

#### **Problembeachtung:**

Kombination verschiedener Prioritätsregeln miteinander, um der im Zeitablauf suboptimal werdenden Auswahlmenge der zur Verfügung stehenden Jobs entgegen zu wirken



# Agenda

---

1. Grundlegende Definitionen
2. Darstellung eines RCPSP
  - 2.1 Mathematische Darstellung der Grundform
  - 2.2 Durchlaufzeitenbeispiel
3. Das RCPSP in der Zeit- und Kapazitätsplanung
4. Fazit



## 4. Fazit

---

- Ressourcenabhängigkeit als Hauptproblem
- Problembetrachtung anhand mathematischer Modelle
- Minimierung der Durchlaufzeit unter Beachtung der Ressourcenbeschränkungen als Oberziel
- Zielerreichung durch heuristische Lösungsverfahren
- Lösung des MRCPSP durch einen Branch and Bound Algorithmus



Vielen Dank für Eure Aufmerksamkeit.