# Langfristige Absatzprognose

# Prognoseverfahren

- lineare Trendextrapolation
- quadratische Trendextrapolation
- logistische Funktion

# Lineare Trendextrapolation

zu schätzende Parameter

$$x_t = a + b\,t + u_t \qquad (t = 1, \ldots, T)$$

Absatzmenge in t

Störvariable in t

Parameterschätzung: Minimierung der Zielfunktion

$$Z = \sum_{t=1}^{T} u_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (x_t - a - bt)^2 \Rightarrow \text{Min !}$$

# Minimierung der Zielfunktion

Partielle Ableitungen bilden:

$$\frac{\partial Z}{\partial a} = -2\sum_{t=1}^{T}(x_t - a - bt) \qquad = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial b} = -2\sum_{t=1}^{T}(x_t - a - bt)\cdot t \qquad = 0$$

Herleiten der Normalgleichungen:

$$\hat{a}\cdot T + \hat{b}\sum_{t=1}^{T} t = \sum_{t=1}^{T} x_t$$

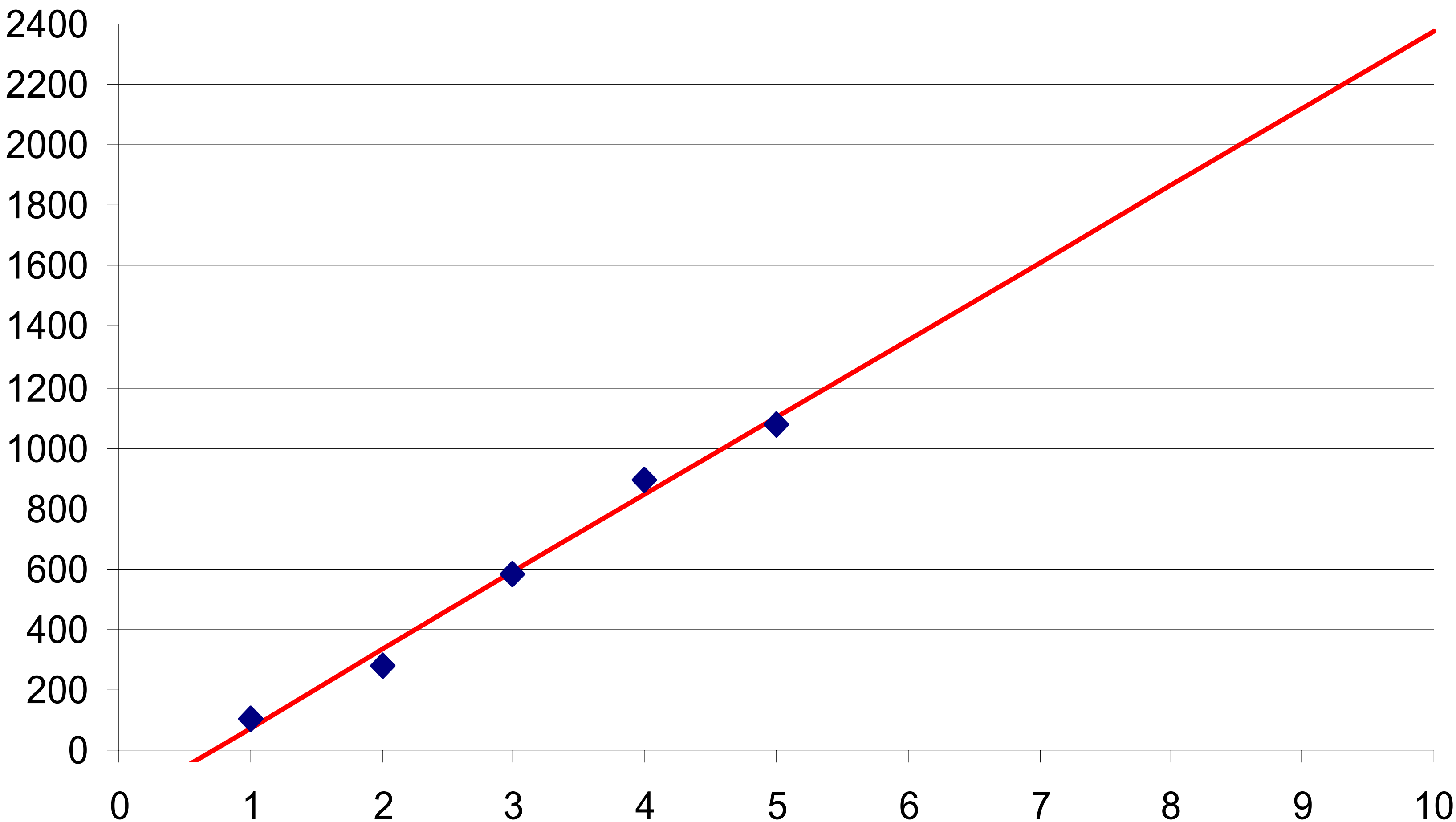
$$\hat{a}\sum_{t=1}^{T} t + \hat{b}\sum_{t=1}^{T} t^2 = \sum_{t=1}^{T} x_t \cdot t$$

# CP-Klausur, SS 06, 2. Termin, Aufgabe 2.1.

| Zeit | Absatzmenge [in 1000 Stk.] |
|---|---|
| 2001 | 105 |
| 2002 | 280 |
| 2003 | 580 |
| 2004 | 890 |
| 2005 | 1080 |

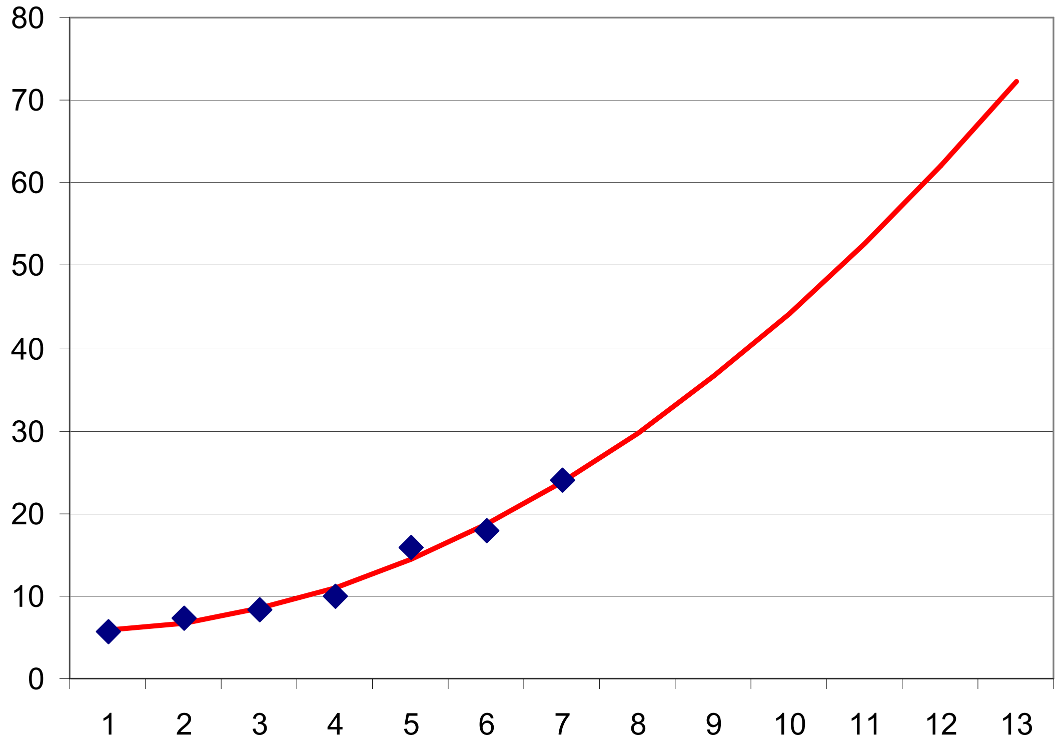
Schätzen Sie die voraussichtliche Absatzmenge für das Jahr 2006 und das Jahr 2010 mit Hilfe der Lineraren Trendextrapolation

# CP-Klausur, SS 06,
# 2. Termin, Aufgabe 2.1.



# Quadratische Trendextrapolation

$$x_t = a + b\,t + c\,t^2 + u_t \quad (t = 1, \ldots, T)$$



# Logistische Funktion

**Fundamentalannahme**:

Das Wachstum $\frac{dx}{dt}$ der Zeitreihe x(t) ist proportional zu

- ➔ dem jeweils erreichten Niveau ***x(t)*** und
- ➔ dem Abstand zwischen x(t) und dem ***Sättigungsniveau S***

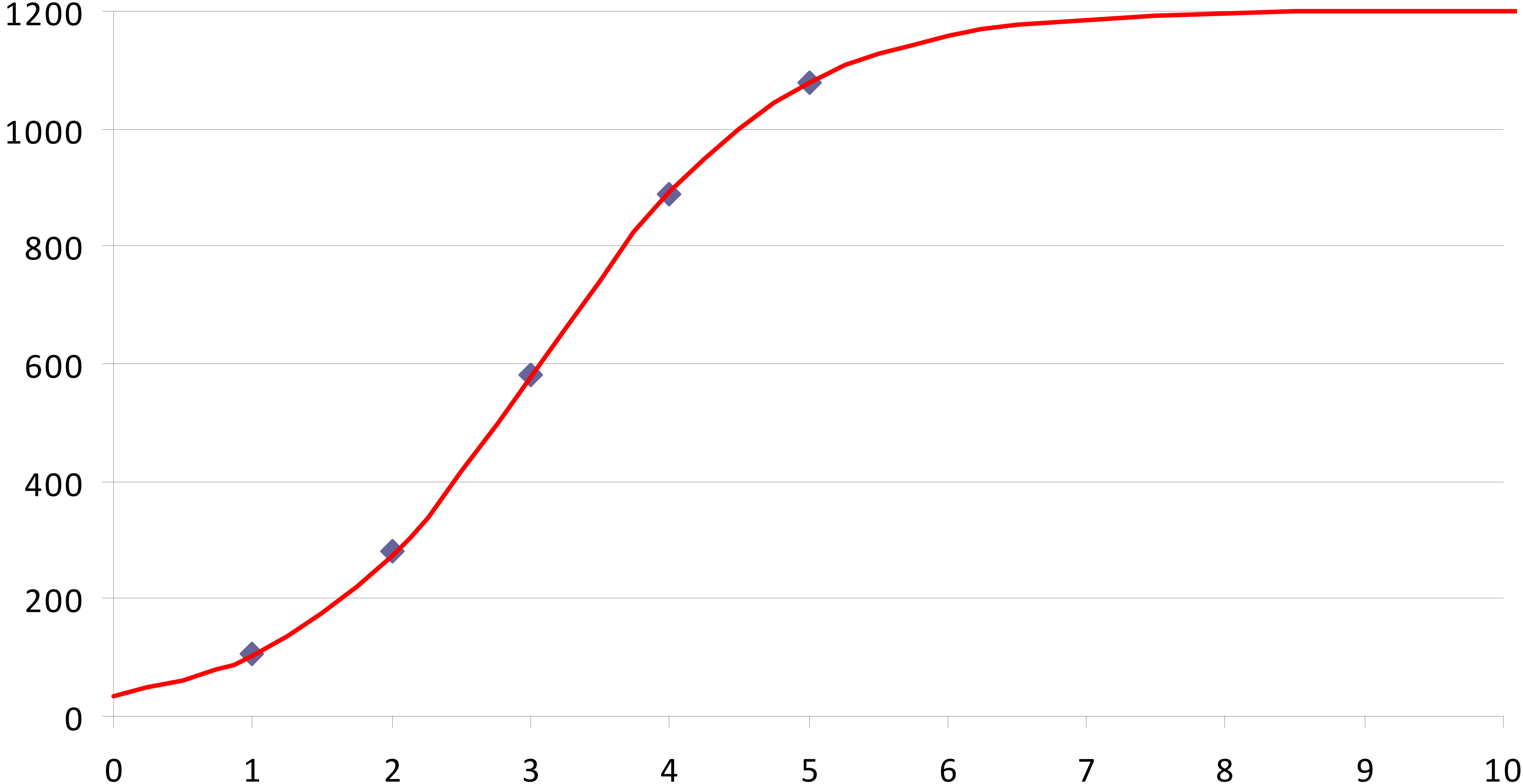
$$\frac{dx}{dt} = ax(S - x)$$

# Logistische Prognosefunktionen

$$x(t) = \frac{S}{1 + e^{-aSt-C}} + u_t$$

- ✓ Schätzung der Parameter S und a
  $\Rightarrow$ daraus Berechnung von C
- ✓ Vereinfachung der Schätzung, wenn S exogen vorgegeben werden kann

# CP-Klausur, SS 06, 2. Termin, Aufgabe 2.2.



# Gütemaße der Prognose

- mittlere absolute Abweichung (MAA)
- mittlere quadratische Abweichung (MQA)
- Wurzel aus der MQA (WMQA)

*Externe Qualität*

- Bestimmtheitsmaß
- F-Test
- t-Test
- Durbin-Watson-Koeffizient

*Interne Qualität*

# Multiple Lineare Regressionsfunktion

$$\hat{y}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{1t} + \hat{b}_2 x_{2t} + \ldots + \hat{b}_n x_{nt}$$

## Problemstellung:

Es liegen $t = 1,\ldots,T$ Messungen für eine abhängige Variable (Y) und n unabhängige Variablen ($X_n$) vor.

Der Verlauf der abhängigen Variable soll so gut wie möglich durch die unabhängigen Variablen erklärt werden.

## Vorgehensweise:

Schätzen der Parameter $b_n$ nach der Methode der kleinsten Quadrate

# Mittlere Absolute/ Quadrierte Abweichung (MAA/MQA)

- $$\text{MAA} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|y_t - \hat{y}_t\right|$$

Gemessener Wert

Prognostizierter Wert

- $$\text{MQA} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2$$

# Interne Prüfung einer linearen Regressionsfunktion

$$\hat{y}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{1t} + \hat{b}_2 x_{2t} + \ldots + \hat{b}_n x_{nt}$$

Prüfung der Regressionsfunktion als **ganzes**

- ☑ Bestimmtheitsmaß
- ☑ F-Test

Prüfung der einzelnen **Regressionskoeffizienten**

- ☑ t-Test

Prüfung der **Annahmen**

- ☑ Durbin-Watson Koeffizient

# Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^{\,2}}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2}$$

$$\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2 = \sum_{t=1}^{T}(\hat{y}_t - \bar{y})^2 + \sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^{\,2}$$

Gesamt-streuung = Erklärte Streuung + Nicht erklärte Streuung

# F - Test

- **Ziel:**

  Prüfung, ob der Wert $R^2$ sich zufällig ergeben hat

- **Vorgehen:**

  (1) Formulierung einer Nullhypothese $H_0$:
  „Es besteht kein Zusammenhang zwischen der abhängigen und den unabhängigen Variablen“

  (2) Wahl einer Vertrauenswahrscheinlichkeit

# F - Test

(3) Test:

- ✓ Ermittlung eines empirischen F-Wertes aus der Stichprobe

$$\boxed{F_{emp} = \frac{\text{erklärte Streuung} / n}{\text{nicht erklärte Streuung} / (T - n - 1)}}$$

- ✓ Vergleich des empirischen mit dem theoretischen F-Wert

$$\mathbf{F_{emp} > F_{tab} \rightarrow H_0 \text{ verwerfen}}$$
$$\mathbf{F_{emp} \leq F_{tab} \rightarrow H_0 \text{ nicht verwerfen}}$$

# t - Test

- Nullhypothese → **$b_j = 0$**
- Ermittlung des empirischen t-Wertes:

$$t_{emp} = \frac{\hat{b}_j}{s_{\hat{b}_j}}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\text{nicht erklärte Streuung}}{T-n-1}}}{\text{Streuung der Variablen j}}$$

- Vergleich des empirischen mit dem theoretischen t-Wert

$$|t_{emp}| > t_{tab} \rightarrow H_0 \text{ verwerfen}$$
$$|t_{emp}| \le t_{tab} \rightarrow H_0 \text{ nicht verwerfen}$$

# Durbin-Watson-Koeffizient

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2} \approx 2 - 2\rho$$

| Fall 1: $\rho \to 1$ | Fall 2: $\rho \to -1$ | Fall 3: $\rho \to 0$ |
|---|---|---|
| $d \to 0$ | $d \to 4$ | $d \to 2$ |
| *positive Autokorrelation* | *negative Autokorrelation* | *keine Autokorrelation* |